第８講　整数問題

1　［1］　連続している２個以上の正の整数がある．これらの整数の和を S として次の問いに答えよ．

（1）　$S=64$ とはなりえないことを示せ．

（2）　$S=200$ となるとき，連続している整数のうち最小，最大のものをそれぞれ求めよ．

［2］　p，q は素数で $p<q$ とする．

（1）　$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しないことを示せ．

（2）　$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは，$p=2$，$q=3$ のときに限ることを示せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　すべての正の整数 n に対して 5^n+an+b が16の倍数となるような16以下の正の整数 $a,\ b$ を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　x は 0 でない実数とする.

(1)　$x+\frac{1}{x}$ が整数ならばすべての正の整数 n に対して $x^n+\frac{1}{x^n}$ も整数であることを示せ.

(2)　$x-\frac{1}{x}$ が 0 以外の整数ならば $x^2-\frac{1}{x^2}$ は整数でないことを示せ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　整数問題

> **1**　[1]　連続している2個以上の正の整数がある．これらの整数の和をSとして次の問いに答えよ．
>
> (1)　$S=64$とはなりえないことを示せ．
>
> (2)　$S=200$となるとき，連続している整数のうち最小，最大のものをそれぞれ求めよ．

題意の整数のうち，最小のものをa，個数をnとすると

$$S=\frac{n\{a+a+(n-1)\cdot 1\}}{2}=\frac{n(2a+n-1)}{2}$$

(1)　$S=64$より　$n(2a+n-1)=128=2^7$　……①

nと$2a+n-1$は偶奇を異にする．また，$n<2a+n-1$より①を満たすのは$n=1$のときのみ．よって，個数が1個となり不適．ゆえに$S=64$にはなりえない．

(2)　$S=200$より　$n(2a+n-1)=400=2^4\cdot 5^2$

よって　$(n,\ 2a+n-1)=(2^4,\ 5^2),\ (5,\ 2^4\cdot 5)$のみ．

したがって　$(a,\ n)=(5,\ 16),\ (38,\ 5)$

ゆえに　**最小5，最大20**　または　**最小38，最大42**

> **1**　[2]　p，qは素数で$p<q$とする．
>
> (1)　$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$を満たす整数$r$は存在しないことを示せ．
>
> (2)　$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$を満たす整数$r$が存在するのは，$p=2$，$q=3$のときに限ることを示せ．

(1)　$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$が成り立つ整数$r$が存在するとする．

$r(p+q)=pq$　　p，qは互いに素より$p+q$はpの倍数でもqの倍数でもない．

よって　$r=kpq$（k：整数）とおける．

このとき　$k(p+q)=1$　　p，qは自然数より　$k=1$，$p+q=1$

これを満たす素数p，qは存在しない．ゆえに$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$を満たす整数$r$は存在しない．

(2)　(1)と同様に考えると　$k(p-q)=1$　より　$k=\pm 1$，$p-q=\pm 1$（複号同順）

$p<q$より　$q-p=1$

よってpとqは偶奇を異にし，素数で偶数は2のみより　$p=2$，$q=3$のときに限る．

> **2**　すべての正の整数nに対して5^n+an+bが16の倍数となるような16以下の正の整数a，bを求めよ．

$a_n=5^n+an+b$とおく．

$a_1=5+a+b$　　$a_2=25+2a+b$　　これらがともに16の倍数より

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$a_2-a_1=a+20$ も 16 の倍数である.

$1\leqq a\leqq 16$ より　$a+20=32$　つまり　$a=12$ に限られる.

このとき　$a_1=b+17$

これが 16 の倍数となるのは　$1\leqq b\leqq 16$ より　$b+17=32$　つまり　$b=15$ に限られる.

よって　$a=12$，$b=15$ であることが必要.

このとき　$a_n=5^n+12n+15$　これが 16 の倍数であると仮定すると　$5^n=a_n-12n-15$ より

$$a_{n+1}=5^{n+1}+12(n+1)+15=5\cdot 5^n+12(n+1)+15=5(a_n-12n-15)+12(n+1)+15$$
$$=5a_n-48n-48=5a_n-16(3n+3)$$

よって，a_{n+1} も 16 の倍数．したがって，すべての自然数 n で a_n は 16 の倍数となる.

ゆえに　$\boldsymbol{a=12}$**，**$\boldsymbol{b=15}$

3　x は 0 でない実数とする.

(1)　$x+\dfrac{1}{x}$ が整数ならばすべての正の整数 n に対して $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ も整数であることを示せ.

(2)　$x-\dfrac{1}{x}$ が 0 以外の整数ならば $x^2-\dfrac{1}{x^2}$ は整数でないことを示せ.

---

(1)　$a_n=x^n+\dfrac{1}{x^n}$ とおく．$a_1=x+\dfrac{1}{x}$ が整数のとき　$a_2=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$　より

a_2 も整数.

ここで　a_{k+1}，a_k が整数であると仮定すると

$$a_{k+2}=x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}=\left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)=a_{k+1}\cdot a_1-a_k$$

よって，a_{k+2} も整数.

ゆえに，すべての自然数 n で a_n すなわち $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ は整数である.

(2)　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4$

$x+\dfrac{1}{x}=a$，$x-\dfrac{1}{x}=b$ とおく．条件より b は 0 以外の整数である.

$a^2=b^2+4$ より b^2+4 が平方数のとき a は整数となる.

$$a^2-b^2=4\qquad つまり\quad (a+b)(a-b)=4$$

ここで　$(a+b)+(a-b)=2a$ より，$a+b$，$a-b$ は偶奇を共にする.

よって　$(a+b,\ a-b)=(2,\ 2)$，$(-2,\ -2)$

つまり　$(a,\ b)=(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ に限られる．ところがいずれも $b\neq 0$ に反する.

したがって b^2+4 は平方数ではない，すなわち，a は無理数である.

ゆえに　$x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=ab$ は無理数，つまり整数ではない.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　正の整数の組 $(a,\ b)$ で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) すべての正の奇数 k は，$m>n\geqq 0$ を満たす整数 m，n によって $k=m^2-n^2$ と表されることを示せ．

(2) 正の偶数 k で，$m>n\geqq 0$ を満たす整数 m，n によって $k=m^2-n^2$ と表されるものをすべて求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　正の整数の組 (a, b) で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．

題意の総和は，初項 a，末項 b，項数 $b-a+1(>1)$　の等差数列の和

ゆえに　$\dfrac{(b-a+1)(a+b)}{2}=500$

$(a+b)(b-a+1)=2^3\times 5^3$ ◀── **積の形**

$(a+b)+(b-a+1)=2b+1$　これは奇数．
よって，$a+b$ と $b-a+1$ とは偶奇を異にする．
また　$(a+b)-(b-a+1)=2a-1>0$　より　$a+b>b-a+1$ ◀── **絞り込み**
さらに　$a<b$　より　$b-a+1>0$

ゆえに　$(a+b, b-a+1)=(125, 8), (40, 25), (200, 5)$

したがって　$\boldsymbol{(a, b)=(59, 66), (8, 32), (98, 102)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) すべての正の奇数 k は，$m>n\geqq 0$ を満たす整数 m，n によって $k=m^2-n^2$ と表されることを示せ．

(2) 正の偶数 k で，$m>n\geqq 0$ を満たす整数 m，n によって $k=m^2-n^2$ と表されるものをすべて求めよ．

(1) $1=1^2-0^2$　$3=2^2-1^2$　$5=3^2-2^2$　……

$m=n+1$ のとき（$m>n$ を満たす）

$$k=m^2-n^2=(n+1)^2-n^2=2n+1$$

n は 0 以上の整数であることより，

$k=2n+1$ はすべての正の奇数を表す．

> ここでは「シミュレート」により $m=n+1$ を予測し，それが正しいことを計算だけで導いた．これは表される結果が明確であったことが大きい．そうでない場合は「数学的帰納法」が選択肢に入ることであろう．

ゆえに　$m>n\geqq 0$ を満たす整数 m，n によってすべての正の奇数 k は $k=m^2-n^2$ と表される．

(2) $2^2-0^2=4$　$3^2-1^2=8$　$4^2-2^2=12$　……

$$k=m^2-n^2=(m+n)(m-n)$$

> $(m+n)+(m-n)=2m$　より　$m+n$ と $m-n$ は偶奇を共にする．
> よって k が偶数となるときは $m+n$，$m-n$ はともに偶数のときに限られ，
> このとき k は必ず 4 の倍数となる．

← **絞り込み**

また，$m=n+2$ のとき

$$k=m^2-n^2=(n+2)^2-n^2=4(n+1)$$

n は 0 以上の整数であることより，$k=4(n+1)$ はすべての正の 4 の倍数を表す．

以上より，$m>n\geqq 0$ を満たす整数 m，n によって $k=m^2-n^2$ と表される正の偶数は，

正である 4 の倍数すべてであり，これに限られる．

> (1)と同様にシミュレートにより $m=n+2$ が予測でき，それにより正であるすべての 4 の倍数があげられる．しかし(2)では「すべて求めよ」とあるので，4 の倍数「以外」にないかを検証しなければならない．それが今回の解答の前半部分である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。